Тема урока:

Применение определенного интеграла для нахождения площади криволинейной трапеции

ПОВТОРИМ!

1. **Функция F(x) называется первообразной функции f(x) на некотором промежутке, если для всех X из этого промежутка выполняется равенство:**

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

Другими словами нахождение первообразной – это обратное действие нахождения производной.

2. F(x)+C, где С произвольная постоянная (любое число), называется семейством первообразных.

3. Совокупность всех первообразных данной функции f(x) называется неопределённым интегралом и обозначается:

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}$$

Таблица первообразных

$f(x)$	$F(x)$		$f(x)$	$F(x)$
a	$a\cdot x + C$		$\sin x$	$-\cos x + C$
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$		$\cos x$	$\sin x + C$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$		$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$tg\, x + C$
e^x	$e^x + C$		$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-ctg\, x + C$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$		$\dfrac{1}{1+x^2}$	$arctg\, x + C$
			$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$

Правила нахождения первообразных

$$f(x) \pm g(x) = F(x) \pm G(x) + C$$

$$kf(x) = kF(x) + C$$

$$f(kx+b) = \frac{1}{k} F(kx+b) + C$$

Найди ошибку в вычислении первообразных

1) $f(x) = x^5$

$F(x) = 5x^4 + C$

$$F(x) = \frac{x^6}{6} + C$$

2) $f(x) = 6x$

$F(x) = \frac{1}{7}x^7$

$$F(x) = 3x^2 + C$$

3) $f(x) = x^4$

$F(x) = \frac{1}{5}x^5$

$$F(x) = \frac{x^5}{5} + C$$

Найдите первообразную функции

1) $f(x) = 2x$

2) $f(x) = 2\sin x + e^{x}$

3) $f(x) = 25x^{4} - 3$

4) $f(x) = \sqrt{x}$

5) $f(x) = (3x+1)^{4}$

Найдите первообразную функции

1) $f(x) = 2x$

2) $f(x) = 2\sin x + e^x$

3) $f(x) = 25x^4 - 3$

4) $f(x) = \sqrt{x}$

5) $f(x) = (3x+1)^4$

1) $F(x) = x^2 + C$

2) $F(x) = -2\cos x + e^x + C$

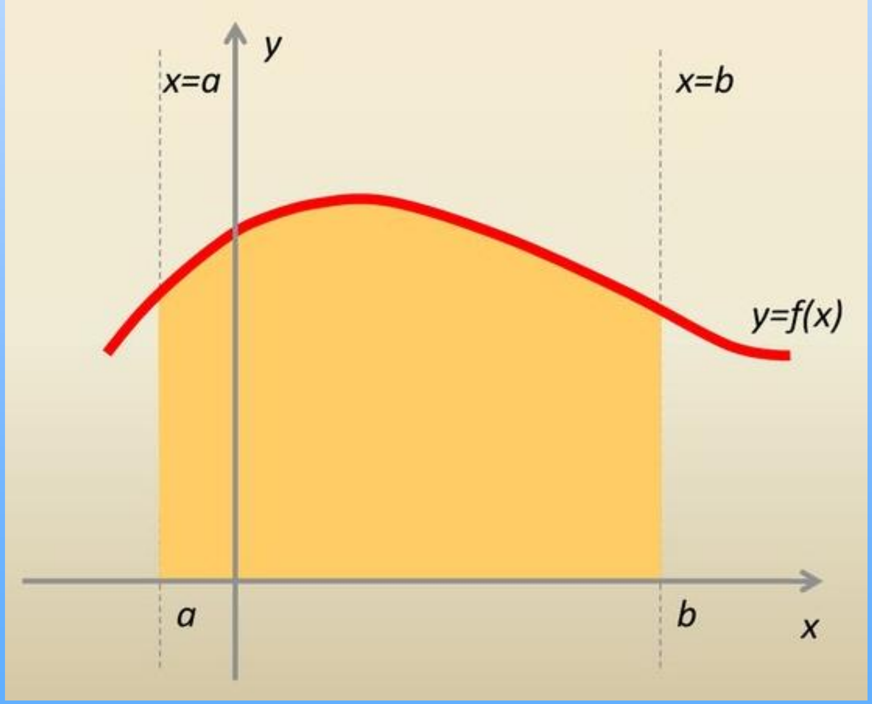
3) $F(x) = 5x^5 - 3x$

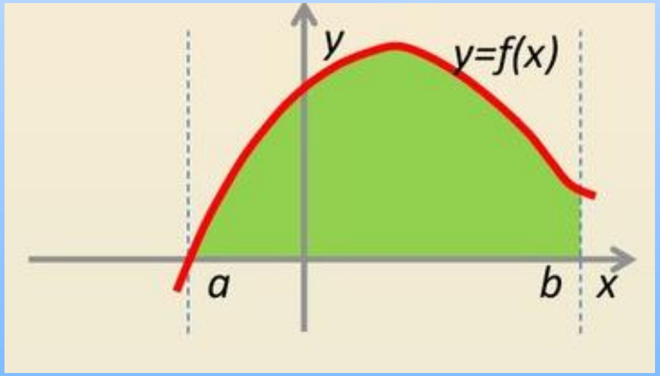
4) $F(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

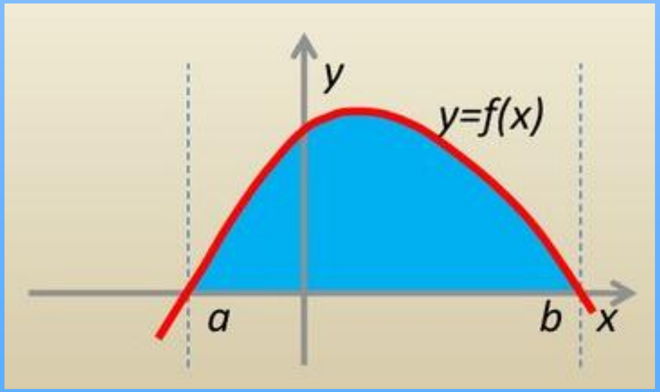
5) $F(x) = \dfrac{1}{15}(3x+1)^5 + C$

Понятие о криволинейной трапеции. Определённый интеграл

Фигура, ограниченная неотрицательной на отрезке [a;b] функцией y=f(x) и прямыми y=0, x=a, x=b называется криволинейной трапецией.







Площадь криволинейной трапеции можно вычислить по формуле:

$$S = F(b) - F(a)$$

Где F(x) – первообразная функции y=f(x)

Вычисление площади криволинейной трапеции сводится к отысканию первообразной F(x) функции f(x), то есть к интегрированию функции f(x).

Определение

Разность *F(b)–F(a)* называют *интегралом* от функции *f(x)* на отрезке [a;b] и обозначают:

Верхний предел интегрирования

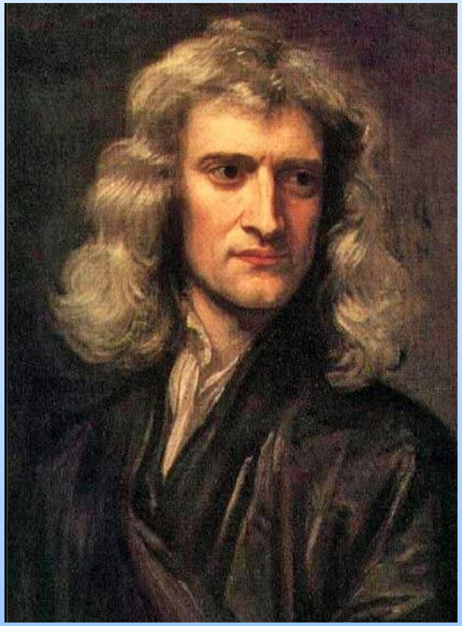
Подынтегральная функция

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Нижний предел интегрирования

Подынтегральное выражение

Формула Ньютона - Лейбница



$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Таким образом:

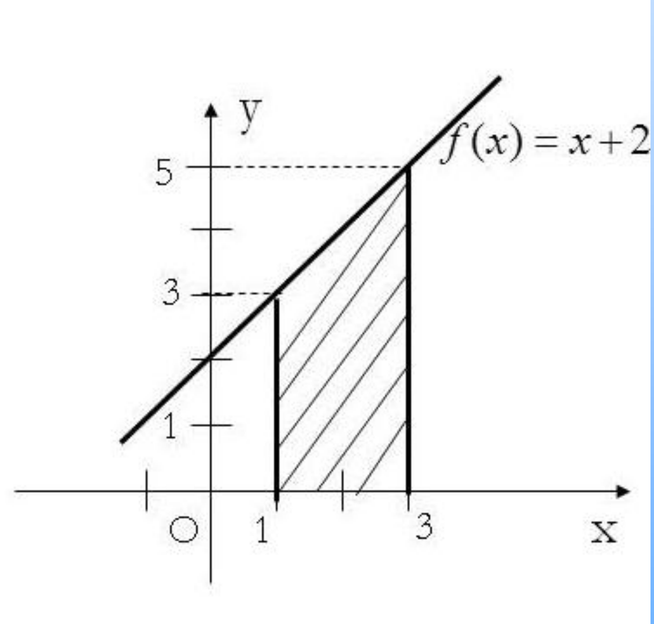
Исаак Ньютон
1642-1727

Готфрид Лейбниц
1646-1716 гг.

$$S = \int_a^b f(x)dx = F\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Геометрический смысл интеграла

Определённый интеграл от неотрицательной непрерывной функции *f*(*x*) по [*a*, *b*] численно равен площади криволинейной трапеции с основанием [*a*, *b*], ограниченной сверху графиком функции *y* = *f*(*x*).



Пример

Вычислить интеграл, если график функции y=f(x) изображён на рисунке

Решение!

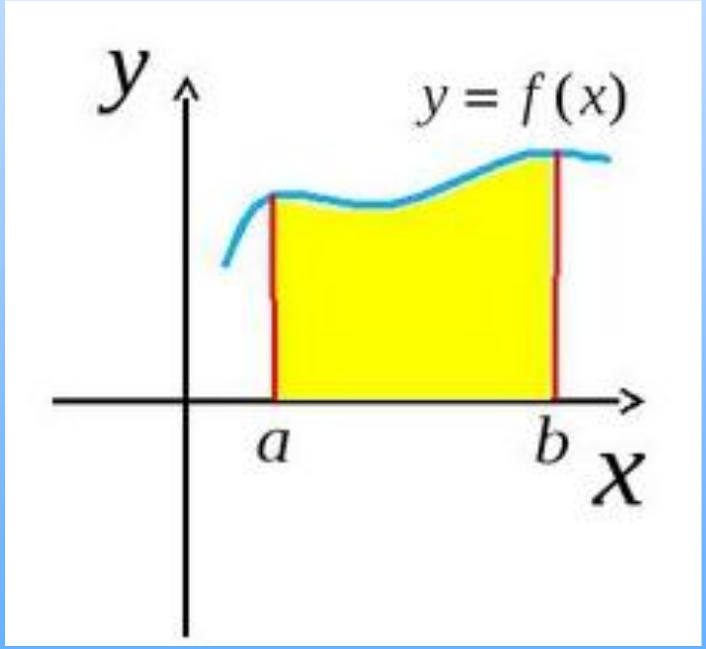
$$S = \int_1^3 (x+2)dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_1^3 = \frac{3^2}{2} + 6 - \left(\frac{1}{2} + 2\right) =$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} + 6 - 2 = 4 + 4 = 8(кв.ед)$$

Вычисление площадей с помощью интегралов

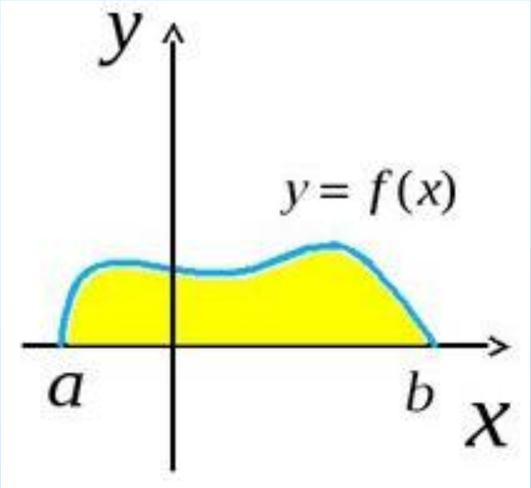
1. Криволинейная трапеция, ограниченная сверху графиком функции y=f(x), снизу осью OX и по бокам отрезком [a;b]

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx}$$



2. Фигура, ограниченная сверху только графиком функции y=f(x) и снизу осью OX

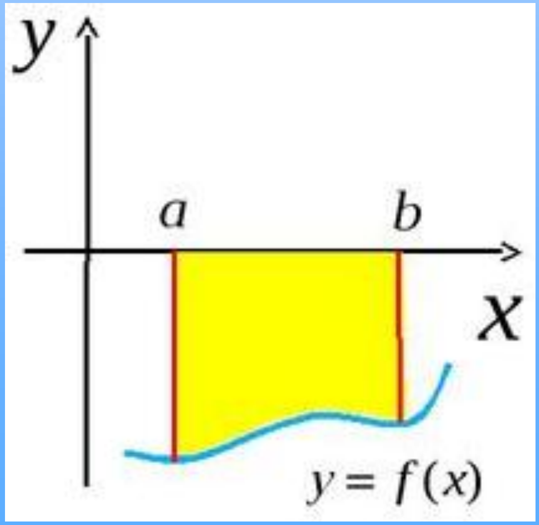
$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx}$$



Точки a и b находим из уравнения f(x) =0

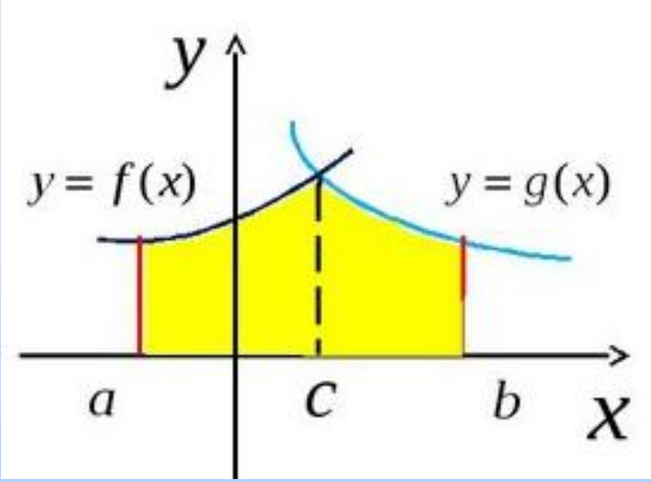
3. Криволинейная трапеция, ограниченная сверху осью OX, снизу графиком функции y=f(x) и по бокам отрезком [a;b]

$$\boxed{S = -\int_a^b f(x)dx}$$



4. Фигура, ограниченная сверху двумя графиками функций y=f(x) и g(x), снизу осью OX и по бокам отрезком [a;b]

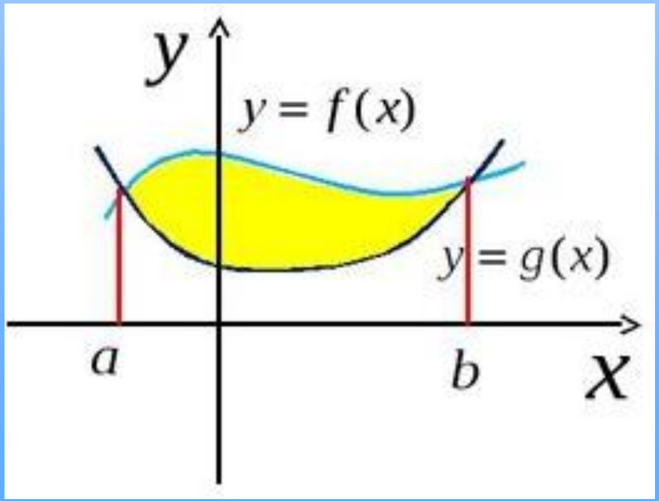
$$S=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b g(x)dx$$



Точку С находим из уравнения f(x)=g(x)

5. Фигура, ограниченная сверху графиком функции y=f(x), снизу графиком функции y=g(x)

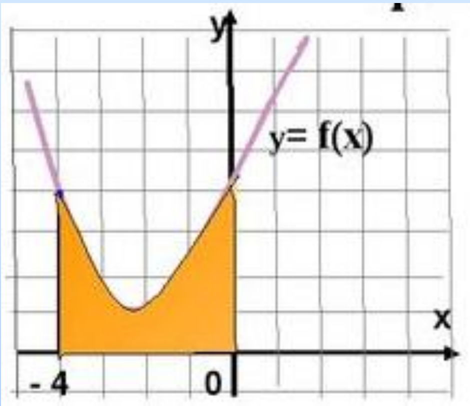
$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$$

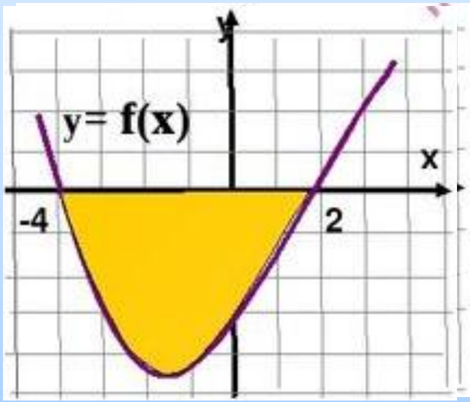


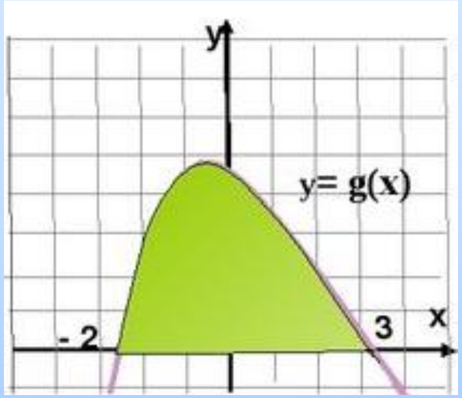
Точки a и b находим из уравнения f(x)=g(x)

Устная работа

Выразите, с помощью интеграла площади фигур, изображённых на рисунке



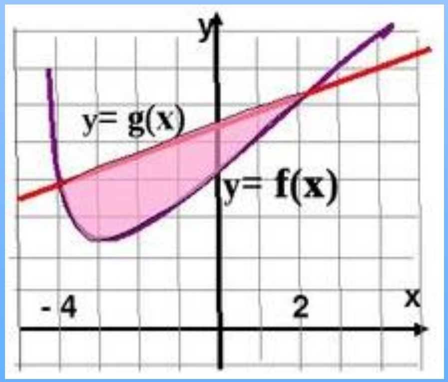


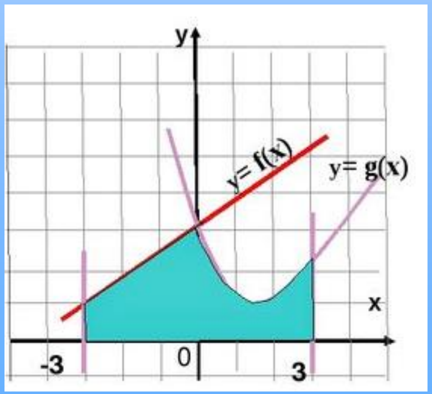


?

?

?



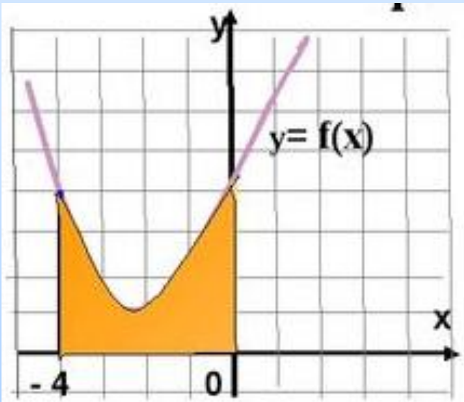


?

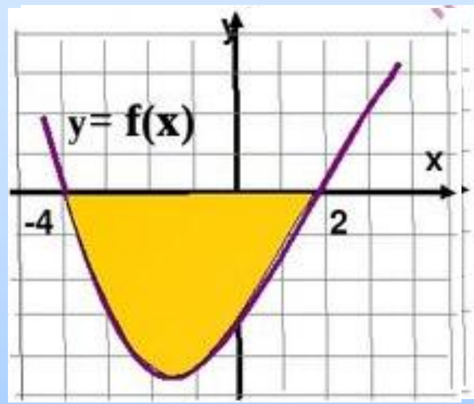
?

Устная работа

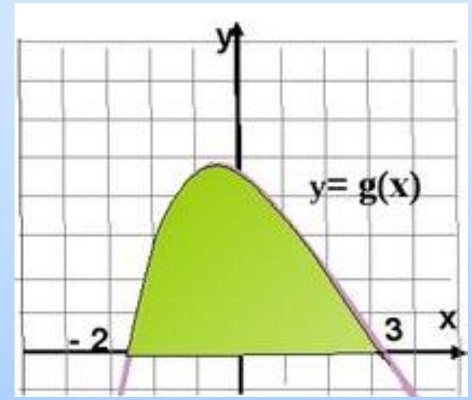
Выразите, с помощью интеграла площади фигур, изображённых на рисунке



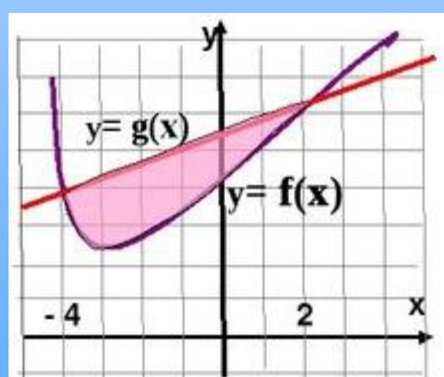
$$S=\int_{-4}^{0} f(x)dx$$



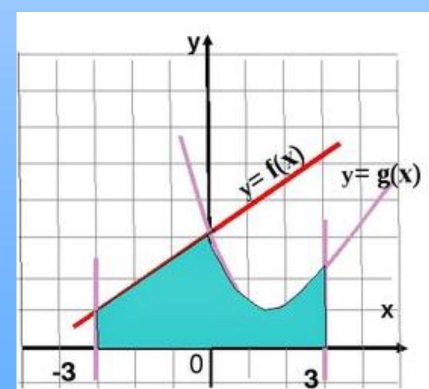
$$S=-\int_{-4}^{2} f(x)dx$$



$$S=\int_{-2}^{3} g(x)dx$$



$$S=\int_{-4}^{2} g(x)dx-\int_{-4}^{2} f(x)dx$$



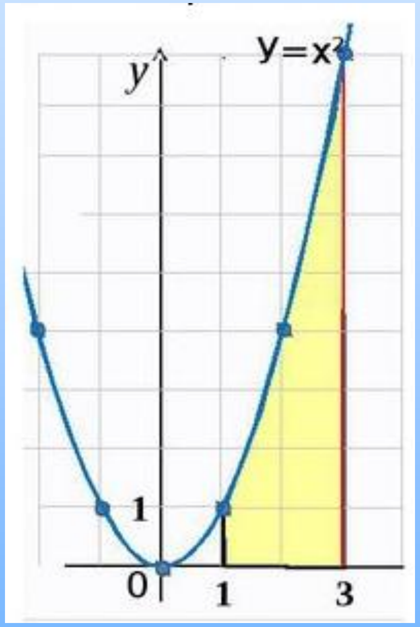
$$S=\int_{-3}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{3} g(x)dx$$

Решение задач

Задание №1

Найти площадь криволинейной трапеции, изображённой на рисунках

1)



Решение

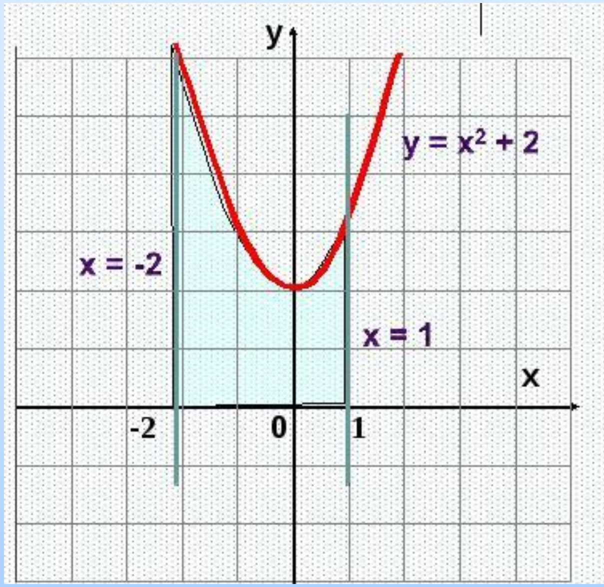
Используя формулу:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Получаем:

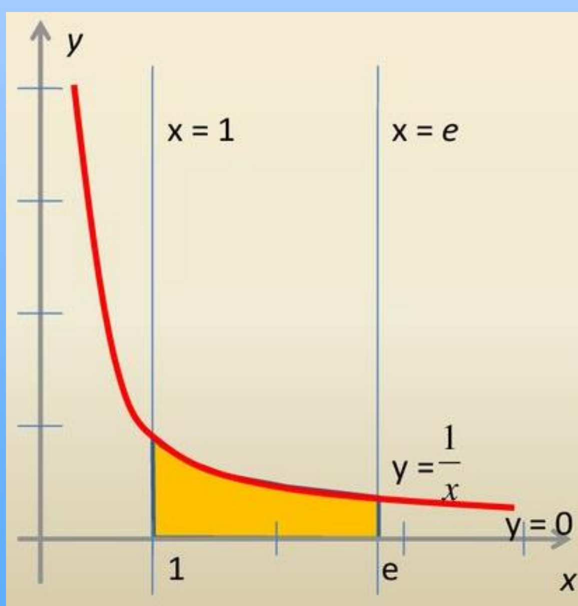
$$S = \int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = 9 - \frac{1}{8} = 8\frac{2}{3} \quad (кв.ед.)$$

2)



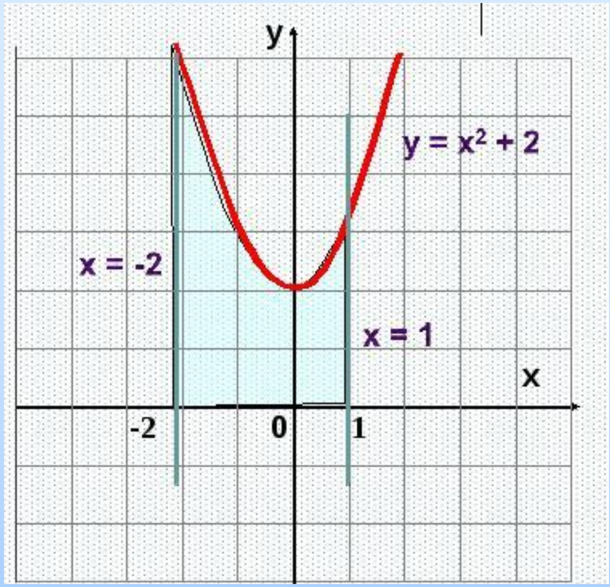
?

3)



?

2)



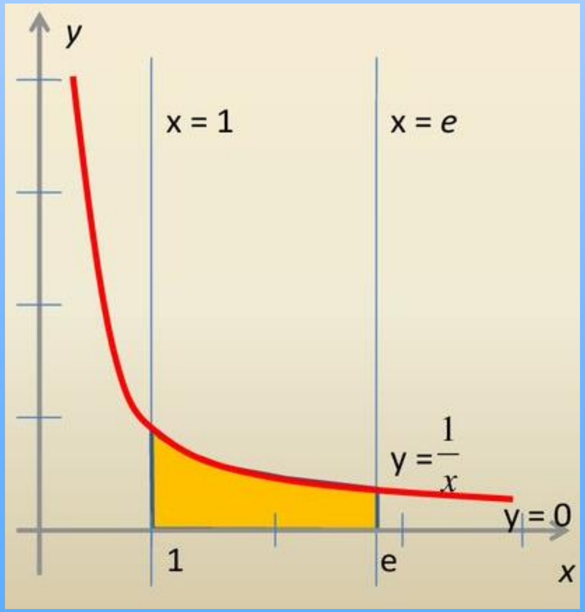
Решение

$$S=\int_{-2}^{1}(x^2+2)dx=\left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\Big|_{-2}^{1}=$$

$$=\frac{1^3}{3}+2-\left(\frac{(-2)^3}{3}+2(-2)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}+2+\frac{8}{3}+4=9(кв.ед)$$

3)

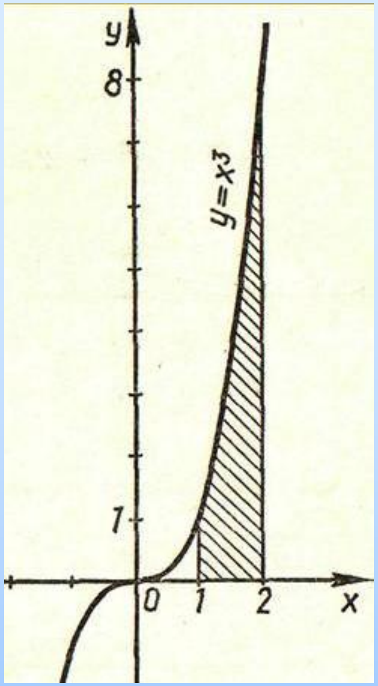


Решение

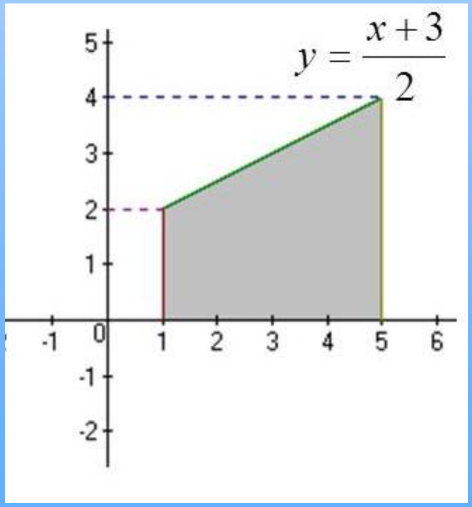
$$S=\int_{1}^{e}\frac{1}{x}=\ln x\Big|_{1}^{e}dx=$$

$$=\ln e-\ln 1=1-0=1(кв.ед)$$

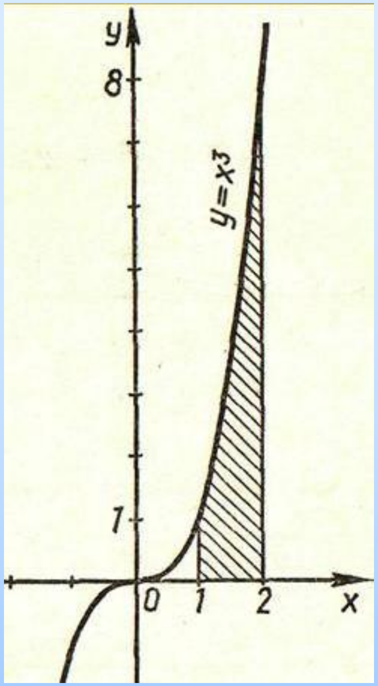
4)



5)



4)



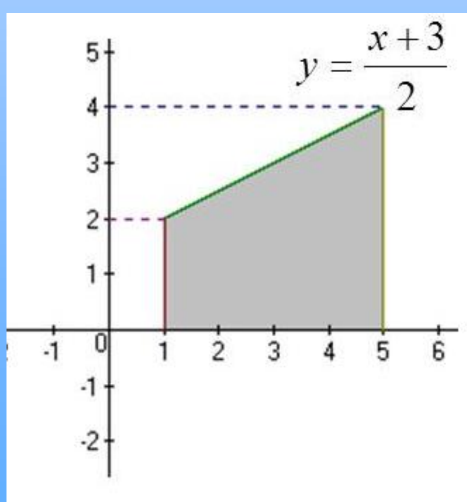
Решение

$$S=\int_1^2 x^3dx=\frac{x^4}{4}\Bigg|_1^2=\frac{2^4}{4}-\frac{1}{4}=$$

$$=4-\frac{1}{4}=3\frac{3}{4}(кв.ед)$$

Решение

5)

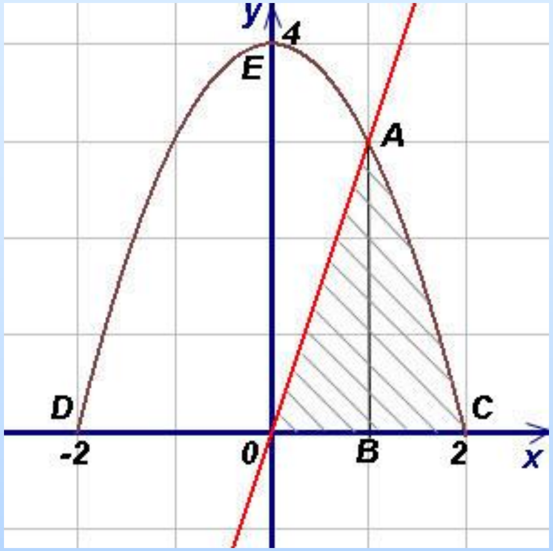


$$S=\int_1^4\frac{x+3}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+3x\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=1+3-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}=4-\frac{1}{4}-\frac{6}{4}=$$

$$=4-\frac{7}{4}=2\frac{1}{4}(кв.ед)$$

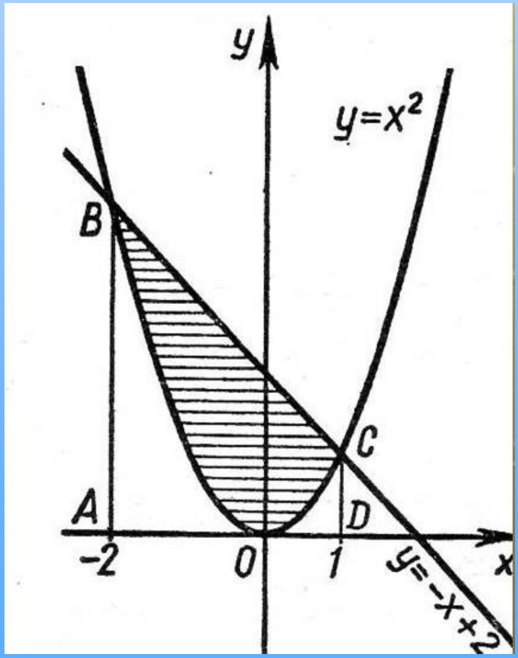
6)



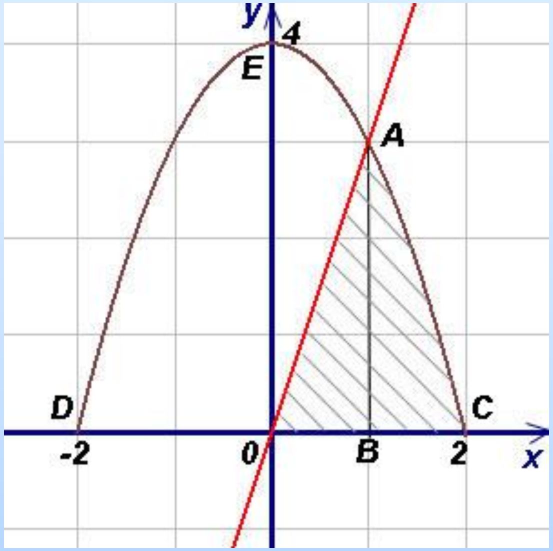
$$y = 4 - x^2, \quad y = 3x, \quad y = 0$$

находится в I четверти

7)



6)



$$y = 4 - x^2, \quad y = 3x, \quad y = 0$$

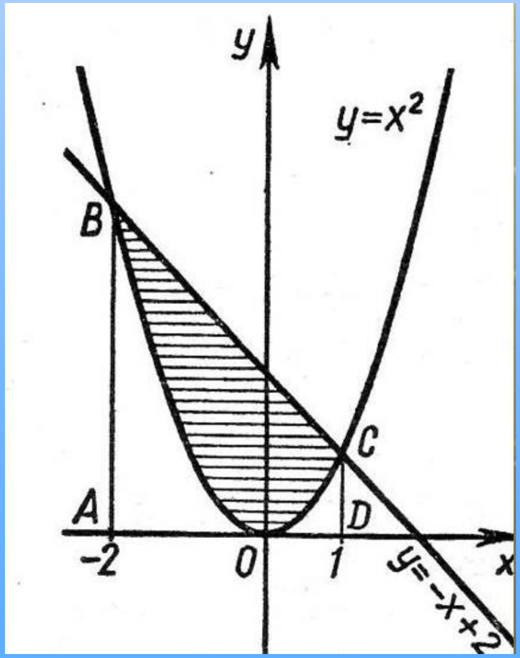
находится в I четверти

Решение

$$S = \int_0^1 3x\,dx + \int_1^2 (4 - x^2)\,dx = \left.\frac{3x^2}{2}\right|_0^1 + \left.\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\right|_1^2 =$$

$$= \frac{3}{2} + \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(4 - \frac{1}{3}\right) = \frac{19}{6} = 3\frac{1}{6}(кв.ед)$$

7)



Решение

$$S = \int_{-2}^{1} (-x + 2)\,dx - \int_{-2}^{1} x^2\,dx = \left.\left(\frac{-x^2}{2} + 2x\right)\right|_{-2}^{1} - \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{1} =$$

$$= \frac{3}{2} + 6 - \frac{1}{3} - \frac{8}{3} = \frac{3}{2} + 6 - 3 = 4\frac{1}{2}(кв.ед)$$

Программируемый контроль

ЗАДАНИЕ №1

Задания		Ответы			
Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями					
1 Вариант	2 Вариант	1	2	3	4
$y=x^2+2$, $y=x+2$	$y=-x^2+4$, $y=-x+4$	7	1/6	2/3	1/3
$y=\sin 2x$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi/4$	$y=\cos 2x$, $y=0$, $x=-\pi/4$, $x=\pi/4$	2	-1	1/2	1
$y=-2/x$, $y=2$, $x=-4$, $x=-1$	$y=-1/x$, $y=1$, $x=-3$, $x=-1$	6-4ln2	2-ln3	2ln2	2-3ln2

Программируемый контроль

ЗАДАНИЕ №1

Задания		Ответы			
Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями					
1 Вариант	2 Вариант	1	2	3	4
$y=x^2+2$, $y=x+2$	$y=-x^2+4$, $y=-x+4$	7	1/6	2/3	1/3
$y=\sin 2x$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi/4$	$y=\cos 2x$, $y=0$, $x=-\pi/4$, $x=\pi/4$	2	-1	1/2	1
$y=-2/x$, $y=2$, $x=-4$, $x=-1$	$y=-1/x$, $y=1$, $x=-3$, $x=-1$	6-4ln2	2-ln3	2ln2	2-3ln2

Правильные ответы

1 Вариант: 2.3,1

2 Вариант: 2,4,2

ЗАДАНИЕ №2

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями (схематично изобразив графики функций).

1) $y = 6 + x - x^2, \;\; y = 6 - 2x$

2) $y = 2x^2, \;\; y = x + 1$

3) $y = 1 - x, \;\; y = 3 - 2x - x^2$

4) $y = x^2, \;\; y = \sqrt{x}$

?

Ответ: 1) 4,5 2) 9/8 3) 4,5 4)1/3

ЗАДАНИЕ №3

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями и осью ОХ, если

1) $y = 6 \cdot (x - x^2)$ 2) $y = 7x - x^2 - 10$

Контрольные вопросы:

1. Какая функция называется первообразной для функции f(x)?
2. Чем отличаются друг от друга различные первообразные функции для данной функции f(x)?
3. Дайте определение неопределённого интеграла.
4. Как проверить результат Какое действие называется интегрированием?
5. интегрирования?
6. Дайте определение определённого интеграла.
7. Сформулируйте теорему Ньютона-Лейбница.
8. Перечислите свойства интеграла.
9. Как вычислить площадь плоской фигуры с помощью интеграла (составьте словесный алгоритм)?
10. Перечислите области применения интеграла, назовите величины, которые можно вычислить с помощью интеграла.

Домашнее задание

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, предварительно сделав рисунок

1) $y = x^2\ (x \geq 0),\ y = 1,\ y = 4,\ x = 0$

2) $y = x^2 - 4x + 8,\ y = 3x^2 - x^3,\ \text{если}\ x \in [-2;3]$

3) $y = 3x + 1,\ y = 9 - x$

4) $y = -x - 4x^2 + 4,\ y = 10,\ x = -3,\ x = 0$

5) $y = x,\ y = 5 - x,\ x = 1,\ x = 2$

6) $y = x^2 - 4x + 2,\ y = x - 2$

7) $y = \sin x,\ x = \dfrac{\pi}{6},\ x = \dfrac{\pi}{3}$